

Návrh algoritmov stavového riadenia

(Model: *M6 Hydraulický systém – dve nádoby v interakcii*)

Cieľom návrhu algoritmov stavového riadenia bude::

1. zabezpečiť stabilizáciu regulovanej veličiny na ustálenej hodnote v okolí pracovného bodu
2. zabezpečiť stabilizáciu regulovanej veličiny pri zmene ustálených hodnôt v okolí pracovného bodu

Úlohy:

1. Zostavte matematicko – fyzikálny model nelineárneho dynamického systému *M6* s využitím analytickej identifikácie
 2. Získajte lineárny model *Hydraulického systému M6* v stavovom opise vo vhodne zvolenom pracovnom bode
 3. V riadiacej štruktúre s dopredným riadením vypočítajte spätnoväzobné zosilnenie k_x a dopredné zosilnenie N :
 - 3.a metódou optimálneho riadenia s využitím princípu minimalizácie kvadratického funkcionálu (LQ)
 - 3.b s využitím metódy rozloženia pólov (stavové modálne riadenie)
 - 3.b.1 vypočítajte zosilnenie pre estimátor stavov
 4. Navrhňte algoritmus pre výpočet spätnoväzobného zosilnenia k_x a dopredného zosilnenia N (LQ riadenie + stavové modálne riadenie)
 5. Simulačne overte algoritmus riadenia v spätnoväzobnej riadiacej štruktúre s dopredným riadením:
 - 5.a simulačné overenie stavových algoritmov riadenia do rovnovážneho stavu pri nenulových počiatkových podmienkach na nelineárnom modeli *M6*
 - 5.b simulačné overenie stavových algoritmov riadenia do ustáleného stavu na nelineárnom modeli *M6*
 - 5.c simulačné overenie stavových algoritmov riadenia do rôznych ustálených stavov na nelineárnom modeli *M6*
 - 5.d simulačné overenie stavových algoritmov riadenia do rôznych ustálených stavov s pôsobením poruchy na nelineárnom modeli *M6*
 - 5.f simulačné overenie stavových algoritmov riadenia do ustáleného stavu na lineárnom modeli *M6*
 - 5.g simulačné overenie stavových algoritmov riadenia do rôznych ustálených stavov na lineárnom modeli *M6*
-

Úloha č.1 Zostavte matematicko – fyzikálny model nelineárneho dynamického systému M6 s využitím analytickej identifikácie

Odvodenie matematického popisu modelu M6 s využitím postupu analytickej identifikácie sa nachádza na stránke predmetu *Optimálne a nelineárne systémy* v časti *Simulačné modely*.

http://matlab.fei.tuke.sk/ons/pdfModely/M6_dveNadobyInter.pdf

Úloha č.2 Získajte lineárny model Hydraulického systému M6 v stavovom opise vo vhodne zvolenom pracovnom bode.

Postup pre získanie lineárneho modelu M6 v stavovom opise ako aj vhodný pracovný bod PB (*pracovný bod A*) sa nachádzajú na stránke predmetu *Optimálne a nelineárne systémy* v časti *Simulačné modely*.

http://matlab.fei.tuke.sk/ons/pdfModely/M6_dveNadobyInter.pdf

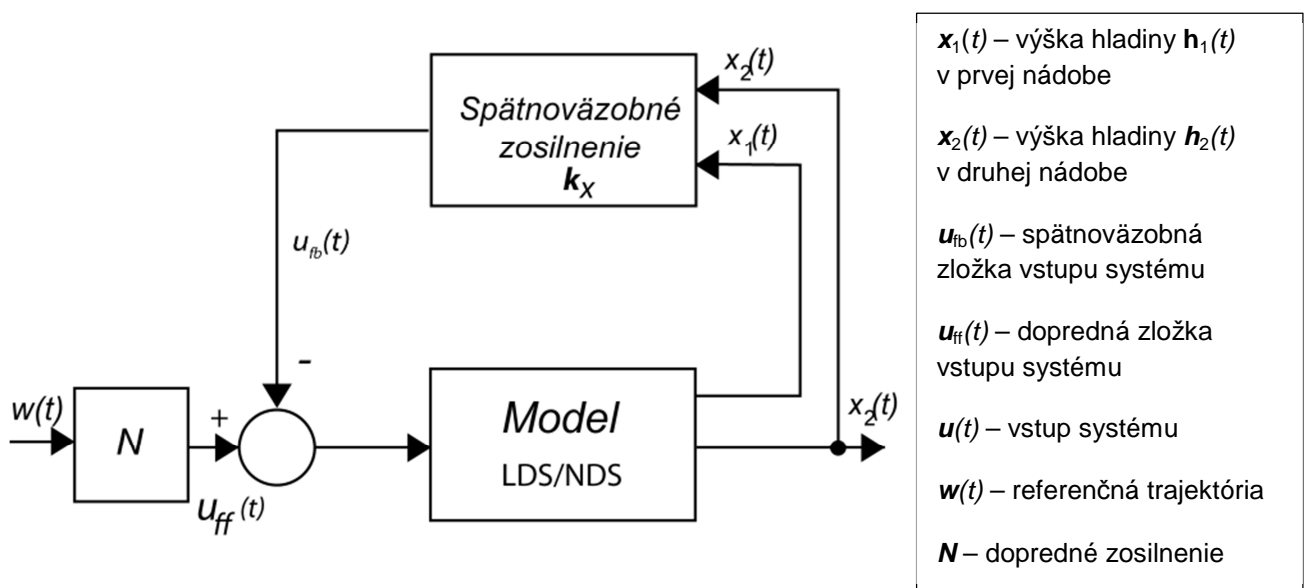
Úloha č.3 V riadiacej štruktúre s dopredným riadením vypočítajte spätnoväzobné zosilnenie k_x a dopredné zosilnenie N

Pri návrhu algoritmov stavového riadenia vychádzame zo spojitého / diskretného stavového opisu lineárneho modelu SISO dynamického modelu M6 v tvare:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \xrightarrow{T_s} \begin{aligned} x((k+1)T) &= Fx(kT) + Gu(kT) \\ y(kT) &= Cx(kT) \end{aligned} \quad (1)$$

kde matice Jacobiánov A , B sú získané linearizáciou vo zvolenom pracovnom bode a matice F , G sú získané diskretizáciou systému s periódou vzorkovania T_s .

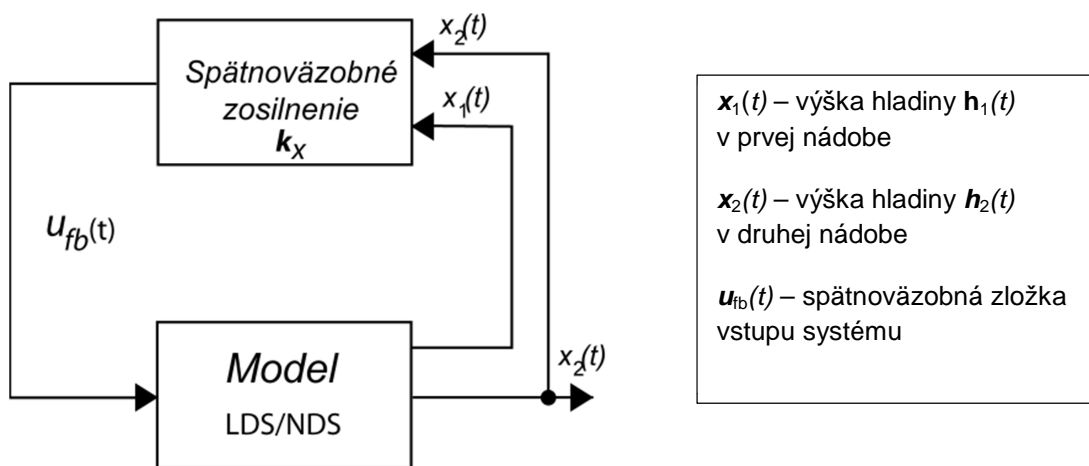
Riadiaca štruktúra so spätnoväzobným zosilnením stavových veličín k_x a dopredným zosilnením referenčnej trajektórie N je zobrazená na Obr.1.



Obr.1 Bloková schéma riadiacej štruktúry so spätnoväzobným zosilnením k_x a dopredným zosilnením N

Úloha 3.a V riadiacej štruktúre s dopredným riadením vypočítajte spätnoväzobné zosilnenie k_x a dopredné zosilnenie N metódou optimálneho riadenia s využitím princípu minimalizácie kvadratického funkcionálu (LQ)

V rámci výpočtu optimálneho riadenia s využitím princípu minimalizácie kvadratického funkcionálu, kde cieľom riadenia je previesť systém z nenulových počiatočných podmienok do rovnovážneho stavu vychádzame z nasledujúcej riadiacej štruktúry:



Obr.2 Bloková schéma riadiacej štruktúry so spätnoväzobným zosilnením k_x

Výpočet spätnoväzobného vektora zosilnení k_x pre spojité čas t je nasledovný:

1. Majme funkcionál

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt \quad (2)$$

ktorý je potrebné minimalizovať pri zadaných obmedzeniach, ktorými sú rovnice stavového opisu:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

V rámci funkcionálu sú nastaviteľnými parametrami váhové matice Q a R .

2. Vychádzajúc z riadiacej štruktúry na Obr.2, pre riadenie do rovnovážneho stavu má zákon riadenia tvar:

$$u_p(t) = -k_x x(t)$$

3. Pre systém zadaný v spojitom stavovom opise a pri zvolenom funkcionáli J (2) (kde $t \rightarrow \infty$) je zosilnenie k_x riešením algebraických Riccatiho rovníc (3):

$$0 = -k_x A - A^T k_x + k_x B R^{-1} B^T k_x - Q \quad (3)$$

Aplikácia v jazyku Matlab:

Pri riešení algebraických Riccatiho rovníc (3) je možné použiť v Matlabe príkaz *lqr*:

$$k_x = \text{lqr}(A, B, Q, R)$$

kde A, B sú matice spojitého systému a Q, R sú váhové matice funkcionálu J .

Systém zadaný v diskretnom stavovom opise pre $t = kT$:

Pre systém zadaný v diskretnom stavovom opise (1), je postup výpočtu totožný s výpočtom v spojitom stavovom opise, pričom vychádzame z funkcionálu v tvare:

$$J_M = x^T(M) Q x(M) + \sum_{i=0}^{M-1} (x^T(i) Q x(i) + u^T(i) R u(i))$$

Algebraické Riccatiho rovnice majú diskretný tvar:

$$P(i-1) = Q + F^T P(i) F - F^T P(i) G (R + G^T P(i) G)^{-1} G^T P(i) F$$

Vektor spätnoväzobných zosilnení možno určiť z rovnice:

$$k_x(i) = (R + G^T P(i) G)^{-1} G^T P(i) F$$

Aplikácia v jazyku Matlab:

Pr výpočte spätnoväzobných zosilnení k_x riešením diskretných algebraických Riccatiho rovníc je možné použiť v Matlabe príkaz $dlqr$:

$$k_x = dlqr(F, G, Q, R)$$

kde F, G sú matice diskretného systému (1) a Q, R sú váhové matice funkcionálu J_M .

Návrh dopredné zosilnenia N :

Pri riadení do ustáleného stavu vychádzame z riadiacej šruktúry zobrazenej na obr. 1, kde zákon riadenia $u(t) / u(kT)$ má tvar:

$$u(t) = u_{fb}(t) + u_{ff}(t) = -k_x x(t) + Nw(t) \quad \rightarrow \text{pre } t$$

$$u(kT) = u_{fb}(kT) + u_{ff}(kT) = -k_x x(kT) + Nw(kT) \quad \rightarrow \text{pre } t = kT$$

Dopredné zosilnenie N pre systém zadaný v spojitom tvare vypočítame:

$$N = \frac{1}{C(Bk_x^T - A)^{-1}B}$$

Dopredné zosilnenie N pre systém zadaný v diskretnom tvare vypočítame:

$$N_D = \frac{1}{C(I - (F - Gk_x^T))^{-1}G}$$

Úloha 3.b V riadiacej štruktúre s dopredným riadením vypočítajte spätnoväzobné zosilnenie k_x a dopredné zosilnenie N s využitím metódy rozloženia pólov (stavové modálne riadenie)

Úlohou stavového modálneho riadenia na báze metódy rozloženia pólov je posun pólov do polohy, ktorá zabezpečí požadované vlastnosti uzavretej riadiacej štruktúry.

Cieľom návrhu stavového modálneho riadenia je určiť taký spätnoväzobný vektor k_x , aby matica dynamiky uzavretej riadiacej štruktúry $(F_D - G_D k_x)$ (10) mala predpísané vlastné čísla.

Pri návrhu stavového modálneho riadenia do rovnovážneho stavu vychádzame z riadiacej štruktúry, ktorá je znázornená na obr.2, avšak v jej diskkrétnej forme pre $t = kT$.

Postup návrhu riadenia je daný nasledujúcimi krokmi:

1. Systém v spojitom stavovom opise (1) je potrebné prepísať na tvar vstupno – výstupnej prenosovej funkcie $G_p(s)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t) \end{aligned} \longrightarrow G_p(s) = \frac{b_k s^k + b_{k-1} s^{k-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_l s^l + a_{l-1} s^{l-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad (4)$$

kde b_0, \dots, b_k a a_0, \dots, a_l sú koeficienty spojitých prenosových funkcií.

2. Následnou diskretizáciou systému $G_p(s)$ (4) pri vhodne zvolenej perióde vzorkovania T_s získame diskrétnu prenosovú funkciu $G_p(z)$:

$$G_p(s) = \frac{b_k s^k + b_{k-1} s^{k-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_l s^l + a_{l-1} s^{l-1} + \dots + a_1 s + a_0} \xrightarrow{T_s} G_p(z) = \frac{b_{D1} z^{-1} + b_{D2} z^{-2} + \dots + b_{Dm} z^{-m}}{1 + a_{D1} z^{-1} + a_{D2} z^{-2} + \dots + a_{Dn} z^{-n}}, \quad (5)$$

kde b_{D1}, \dots, b_{Dm} a a_{D1}, \dots, a_{Dn} sú koeficienty diskkrétnej prenosovej funkcie

Pozn.: Pre model M6 Hydraulický systém je postačujúca perióda vzorkovania $T_s = 1s$, keďže sa jedná o systém s pomalšou dynamikou.

3. V ďalšom kroku je potrebné prepísať systém do stavového opisu v normálnej forme riaditeľnosti:

$$\mathbf{F}_D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -a_{Dn} & -a_{Dn-1} & -a_{Dn-2} & \dots & -a_{D1} \end{bmatrix}; \mathbf{G}_D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{C}_D = [b_{Dn} \quad b_{Dn-1} \quad \dots \quad b_{D1}]; \quad (6)$$

kde $a_{Dn}, a_{Dn-1}, a_{Dn-2}, \dots, a_{D1}$ a $b_{Dn}, b_{Dn-1}, \dots, b_{D1}$ sú koeficienty diskrétnej prenosovej funkcie $G_p(z)$ (5).

4. Model je opísaný v stavovom priestore:

$$\begin{aligned} \hat{x}((k+1)T) &= \mathbf{F}_D \hat{x}(kT) + \mathbf{G}_D u(kT), \\ y(kT) &= \mathbf{C}_D^T \hat{x}(kT) \end{aligned} \quad (7)$$

kde $\hat{x}(kT) \neq x(kT)$, teda stavy $\hat{x}(kT)$ nemajú fyzikálny význam výšok hladín Hydraulického modelu M6.

5. Riadenie do rovnovážneho stavu má tvar

$$u_{fb}(kT) = -\mathbf{k}_X \hat{x}(kT) \quad (8)$$

6. Systém s riadením (8) je opísaný rovnicou

$$\hat{x}((k+1)T) = (\mathbf{F}_D - \mathbf{G}_D \mathbf{k}_X) \hat{x}(kT) \quad (9)$$

7. Žiadaný charakteristický polynóm má tvar daný zvolenými pólmi z_i :

$$Np(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) = z^n + q_1 z^{n-1} + \dots + q_{n-1} z + q_n$$

z_1, z_2, \dots, z_n -- zvolené póly systému

Výpočet vektora spätnoväzobných zosilnení \mathbf{k}_X je daný vzťahom:

$$\begin{aligned} k_i &= q_i - a_{Di}, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \mathbf{k}_X &= [k_n \dots k_1]^T \end{aligned}$$

8. Matica dynamiky uzavretej riadiacej štruktúry s riadením (8) má tvar:

$$\mathbf{A}_C = (\mathbf{F}_D - \mathbf{G}_D \mathbf{k}_X) \quad (10)$$

Pre riadenie do ustáleného stavu, ktoré vychádza z riadiacej štruktúry na obr.1, je potrebné vypočítať navyše dopredné zosilnenie N .

9. Riadenie s doprednou zložkou vstupného signálu $u_{ff}(t)$ má tvar:

$$u(kT) = u_{fb}(kT) + u_{ff}(kT), \quad (11)$$

$$\text{kde } u_{ff}(kT) = Nw(kT). \quad (12)$$

10. Dopredné zosilnenie N vypočítame pomocou nasledujúceho vzťahu:

$$N = \frac{1}{C_D^T (I - A_C)^{-1} B_D}$$

11. Pre výsledné riadenie po dosadení vzťahu (8) a (12) do rovnice (11) platí:

$$u(kT) = -\mathbf{k}_X \hat{x}(kT) + Nw(kT). \quad (13)$$

V prípade, že systém nie je možné vyjadriť v normálnej forme riaditeľnosti, spätnoväzobný vektor \mathbf{k}_X vypočítame napr. pomocou funkcie *place* v Matlabe:

$$\mathbf{k}_X = \text{place}(\mathbf{F}, \mathbf{G}, z)$$

Výsledkom tejto funkcie je spätnoväzobný vektor zosilnení \mathbf{k}_X , kde \mathbf{F} a \mathbf{G} sú získané diskretizáciou systému (1) s periódou vzorkovania T_s a z je vektor zvolených pólov systému.

Úloha 3.b.1 Pre metódu rozloženia pólov (stavové modálne riadenie) vypočítajte zosilnenie pre estimátor stavov

Nakoľko nebolo možné matice F a G transformovať do normálnej formy riaditeľnosti, z ktorej sme vychádzali pri návrhu stavového modálneho riadenia, použijeme na odhad stavov $\hat{x}(k)$ estimátor.

Pozn.: Estimátor umožňuje zistiť na základe vstupných a výstupných hodnôt dynamického systému presné hodnoty jeho stavov.

V ďalšej časti je popísaný postup návrhu zosilnenia J_{est} pre estimátor stavov $\hat{x}(k)$:

- 1) Vychádzame z diskrétného stavového opisu (7) lineárneho dynamického systému M6.
- 2) Rovnice estimátora sú dané nasledovne:

$$\begin{aligned} \hat{x}((k+1)T) &= \mathbf{F}_D \hat{x}(kT) + \mathbf{G}_D u(kT) + \mathbf{J}_{est} (y(kT) - \hat{y}(kT)) \\ \hat{y}(kT) &= \mathbf{C}_D \hat{x}(kT) \end{aligned} \quad (14)$$

- 3) Cieľom je vypočítať zosilnenie estimátora J_{est} , ktoré zabezpečí, aby chyba

$$e(k+1) = (\mathbf{F}_D - \mathbf{J}_{est} \mathbf{C}_D) e(k)$$

konvergovala k nule. Podmienkou je, aby matica dynamiky estimátora $\mathbf{F}_{De} = \mathbf{F}_D - \mathbf{J}_{est} \mathbf{C}_D$ mala všetky vlastné hodnoty v absolútnej hodnote menšie ako jedna. Póly estimátora sa volia tak, aby estimátor bol niekoľkokrát rýchlejší ako daný systém.

Na základe princípu duálnosti je možné vypočítať zosilnenie estimátora J_{est} ako riešenie Ackermanovej rovnice.

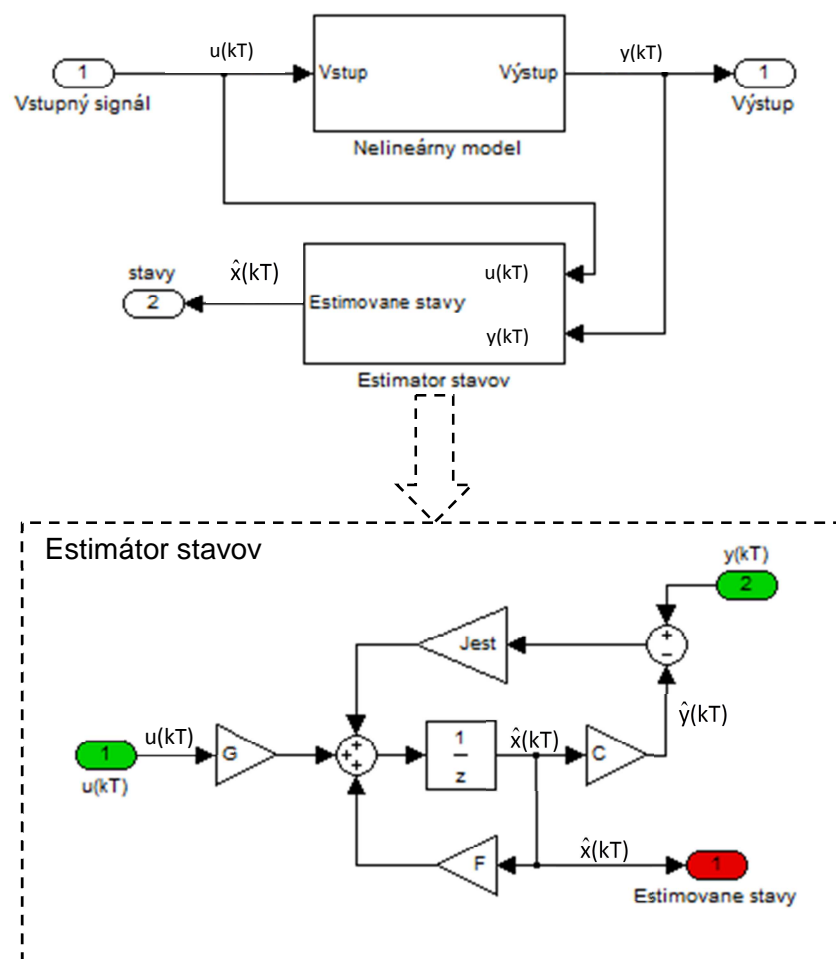
Pozn.: Detailné matematické odvodenie estimátora stavov je zhrnuté v predmete Diskrétny systémy.

Jednou z možností ako vypočítať zosilnenie estimátora J_{est} v Matlabe je použiť funkciu place:

$$J_{est} = place(F^T, C^T, z_e)$$

Výsledkom tejto funkcie je zosilnenie estimátora J_{est} , kde z_e je vektor zvolených pólov estimátora.

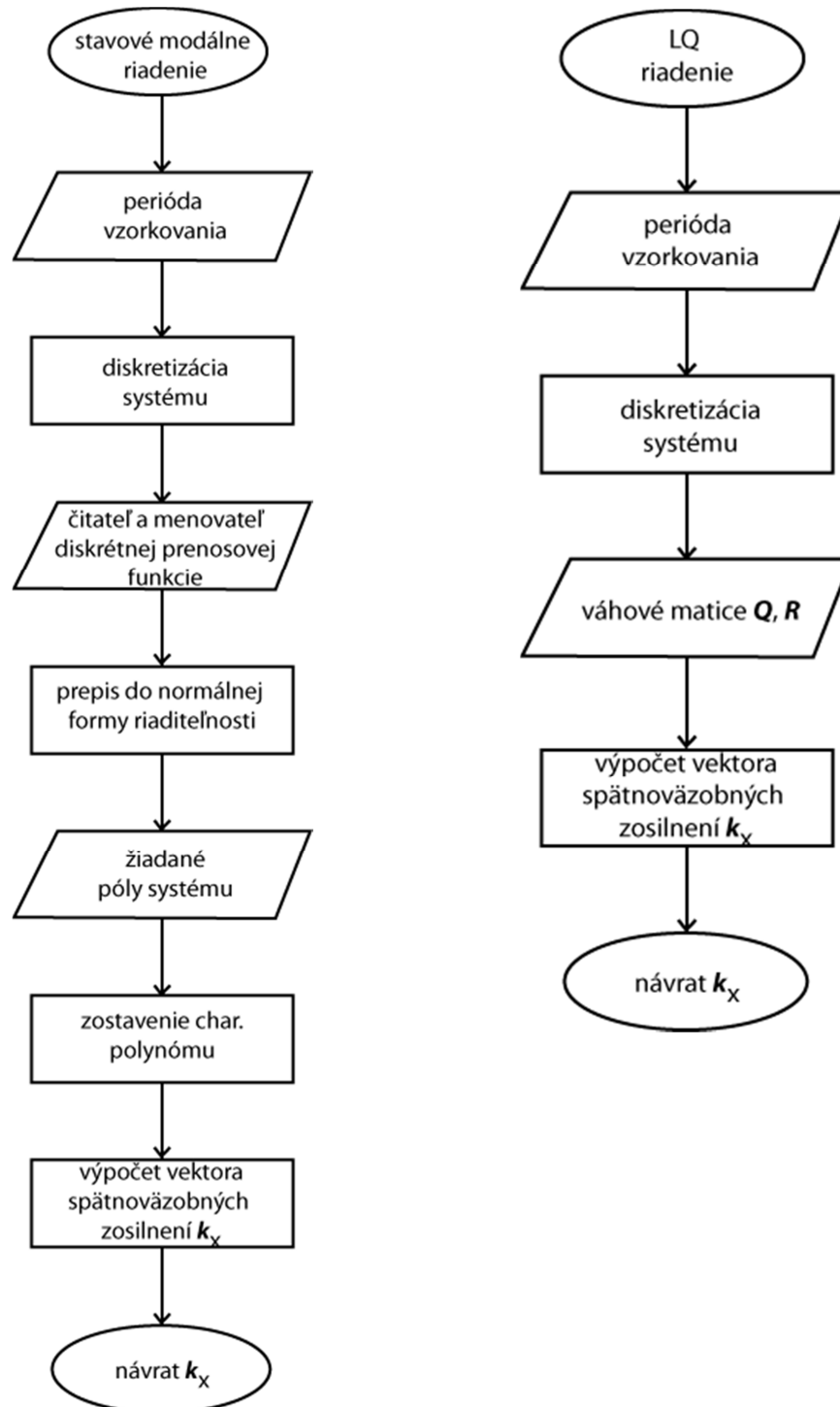
Implementácia rovníc (14) do prostredia *Simulink* je znázornená na Obr.3.



Obr.3 Štruktúra bloku estimátora v Simulinku

Úloha č.4 Navrhnete algoritmus pre výpočet parametrov stavového regulátora

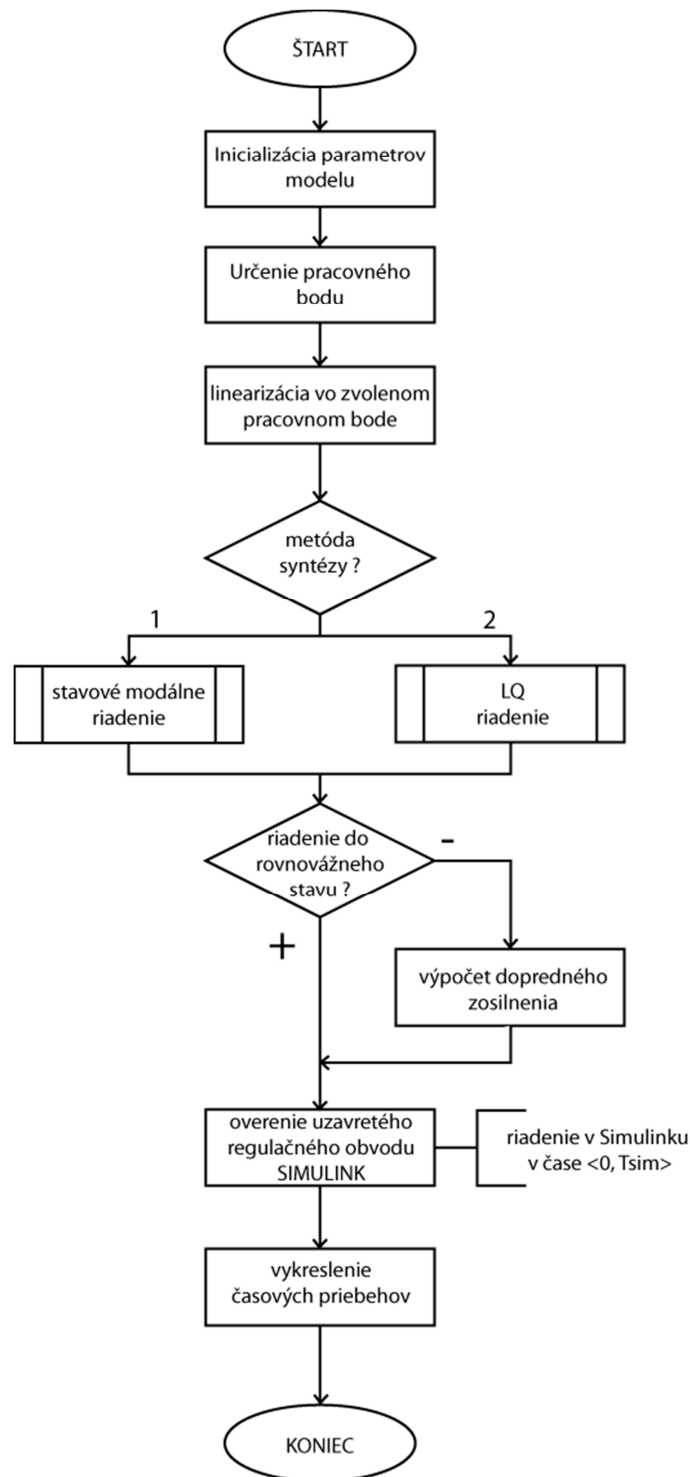
Ako príklad algoritmizácie stavového riadenia sú nižšie uvedené vývojové diagramy (Obr.4) pre metódu stavového modálneho riadenia vľavo a stavového LQ riadenia vpravo.



Obr.4 Vývojové diagramy výpočtu spätnoväzobných zosilnení k_x stavového modálneho riadenia a LQ riadenia

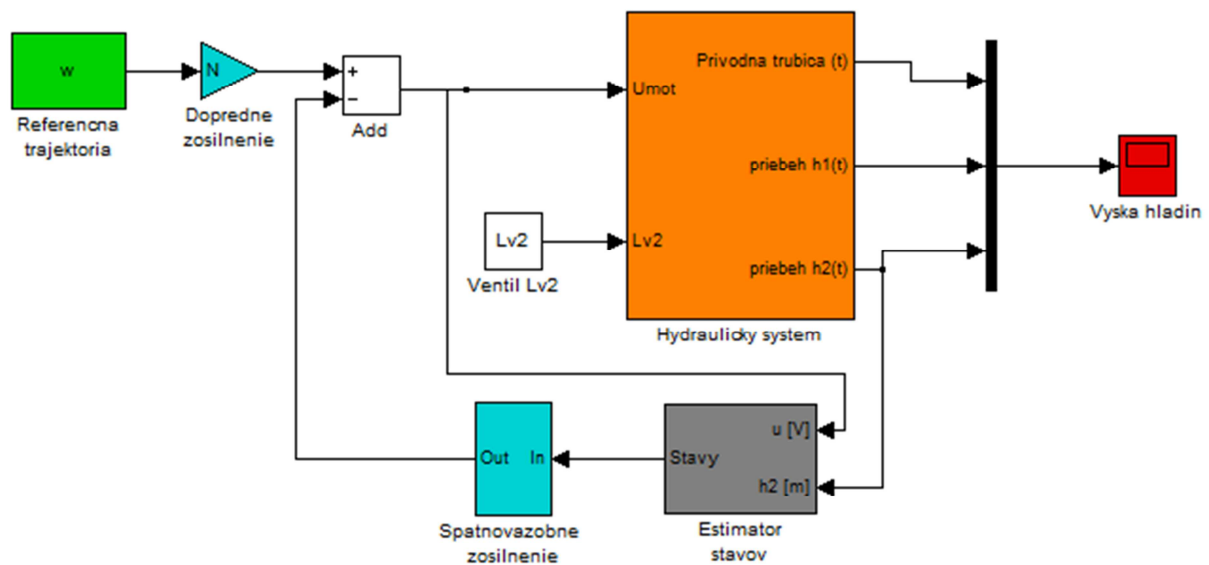
Úloha č.5 Simulačne overte algoritmus riadenia v spätnoväzobnej riadiacej štruktúre s dopredným riadením

Vývojový diagram zobrazený nižšie zobrazuje algoritmus pre overenie stavového riadenia. Úlohou je overiť daný algoritmus a jednotlivé metódy stavového riadenia.



Obr. 5 Algoritmus verifikácie stavového riadenia

Simulačná schéma riadiacej štruktúry pre stavové modálne riadenie v prostredí Simulink je znázornená na Obr.6.



Obr.6 Simulačná schéma stavového modálneho riadenia (Simulink)

Subsystem *Hydraulický systém* predstavuje namodelované nelineárne diferenciálne rovnice, ktorými je popísaný Hydraulický model M6.

Blok *Spatnoväzobné zosilnenie* zahŕňa vypočítané zosilnenie k_x stavového riadenia.

Blok *Estimátor stavov* predstavuje namodelované rovnice estimátora s vypočítaním zosilnením J_{est} .

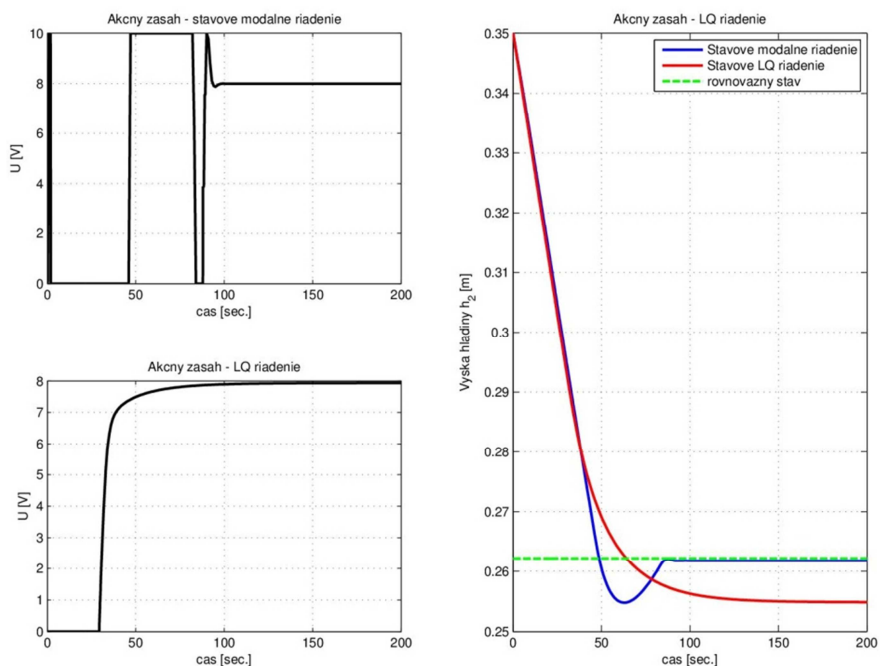
Blok *Dopredné zosilnenie* predstavuje zosilnenie N žiadanej hodnoty.

Ako poruchová veličina je uvažovaná zmena veľkosti otvorenia ventilu $Lv_2 \in \langle 0;1 \rangle$.

$$z(t) = Lv_2(t).$$

Pri verifikácii Hydraulického systému M6 so stavovým riadením vychádzame z riadiacej štruktúry, ktorá je znázornená na Obr.1.

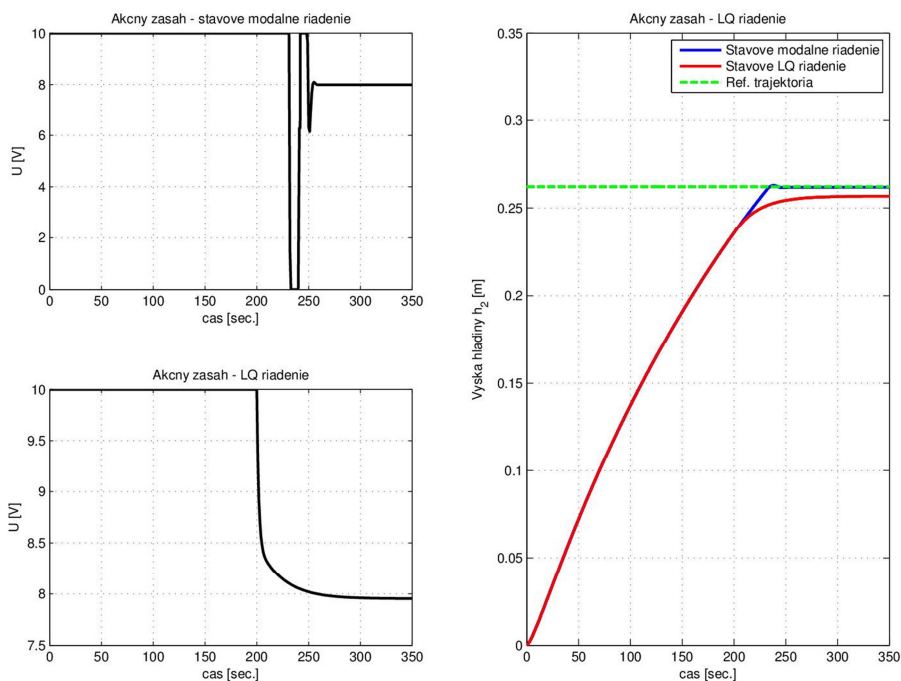
5.a simulačné overenie stavových algoritmov riadenia do rovnovážneho stavu pri nenulových počiatkových podmienkach na nelineárnom modeli



Obr.7 Porovnanie časových priebehov – riadenie do rovnovážneho stavu
- nelineárny model

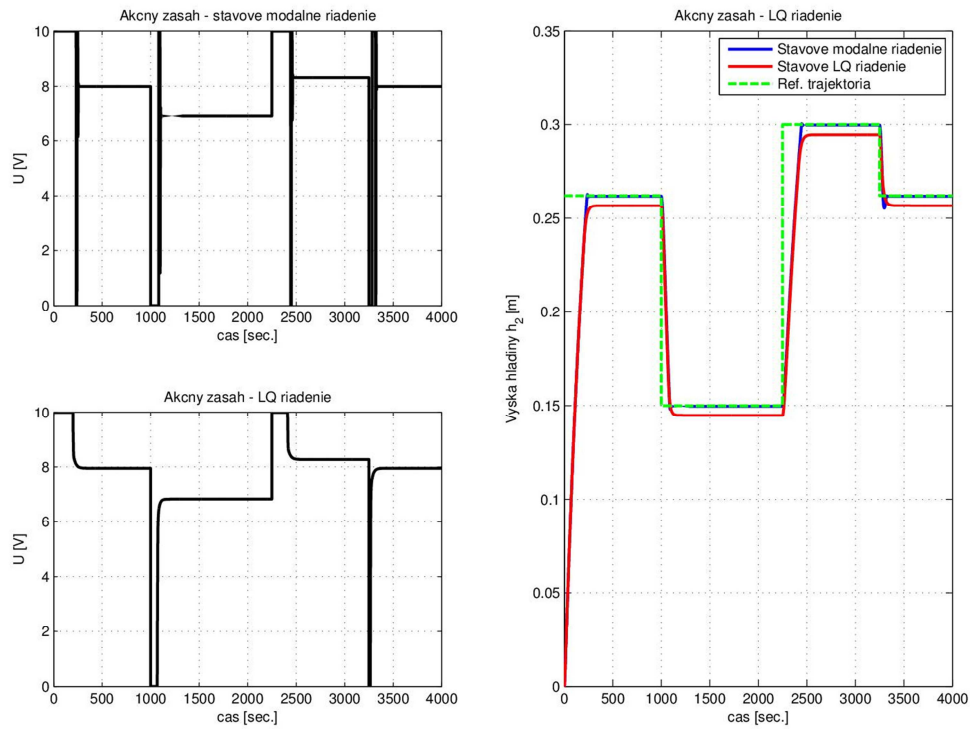
Pozn.: V tomto prípade je dopredné zosilnenie $N=0$. Rovnovážnym stavom je ustálená výška hladiny (Pracovný bod A).

5.b simulačné overenia stavových algoritmov riadenia do ustáleného stavu na nelineárnom modeli



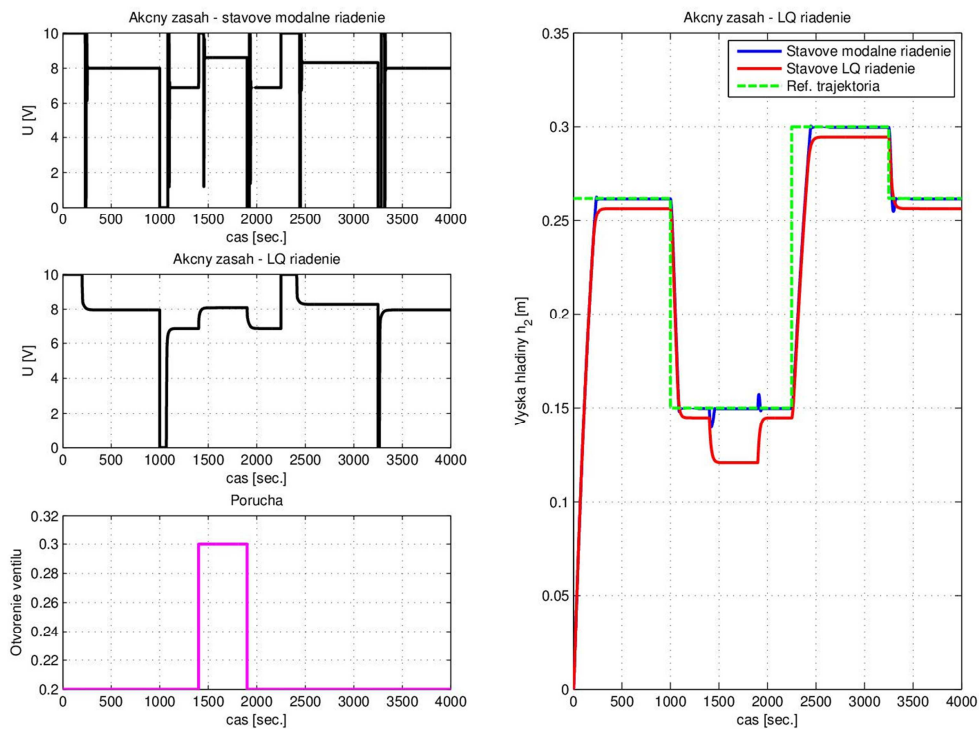
Obr.8 Porovnanie časových priebehov - stabilizácia regulovanej veličiny na ustálenú hodnotu – nelineárny model

5.c simulačné overenie stavových algoritmov riadenia do rôznych ustálených stavov na nelineárnom modeli



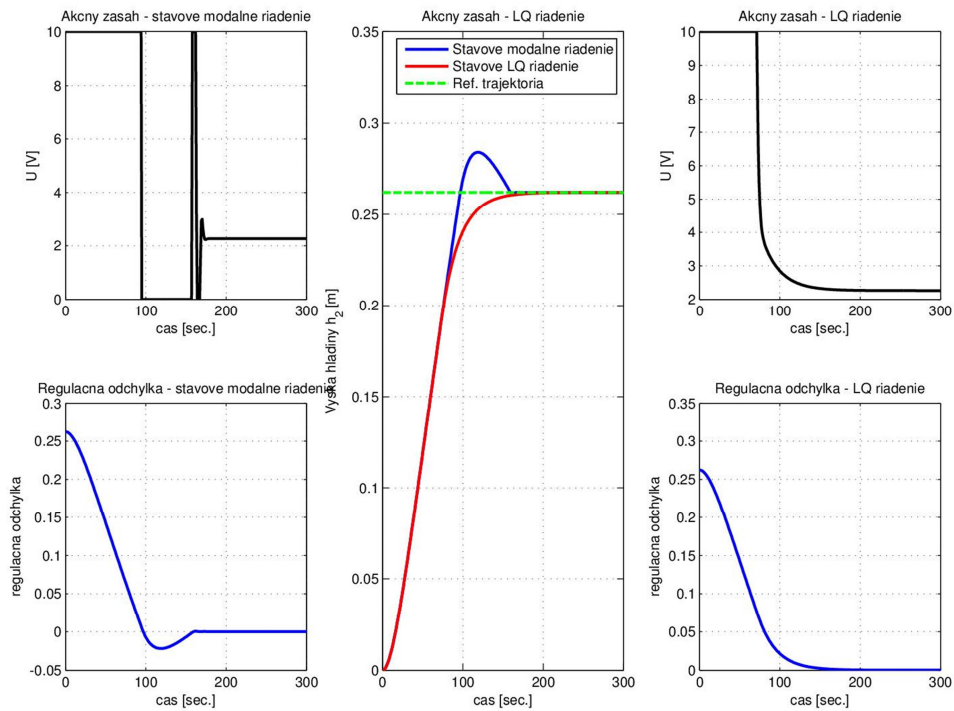
Obr.9 Porovnanie časových priebehov - stabilizácia regulovanej veličiny pri zmene ustálených hodnôt – nelineárny model

5.d simulačné overenie stavových algoritmov riadenia do rôznych ustálených stavov s pôsobením poruchy na nelineárnom modeli



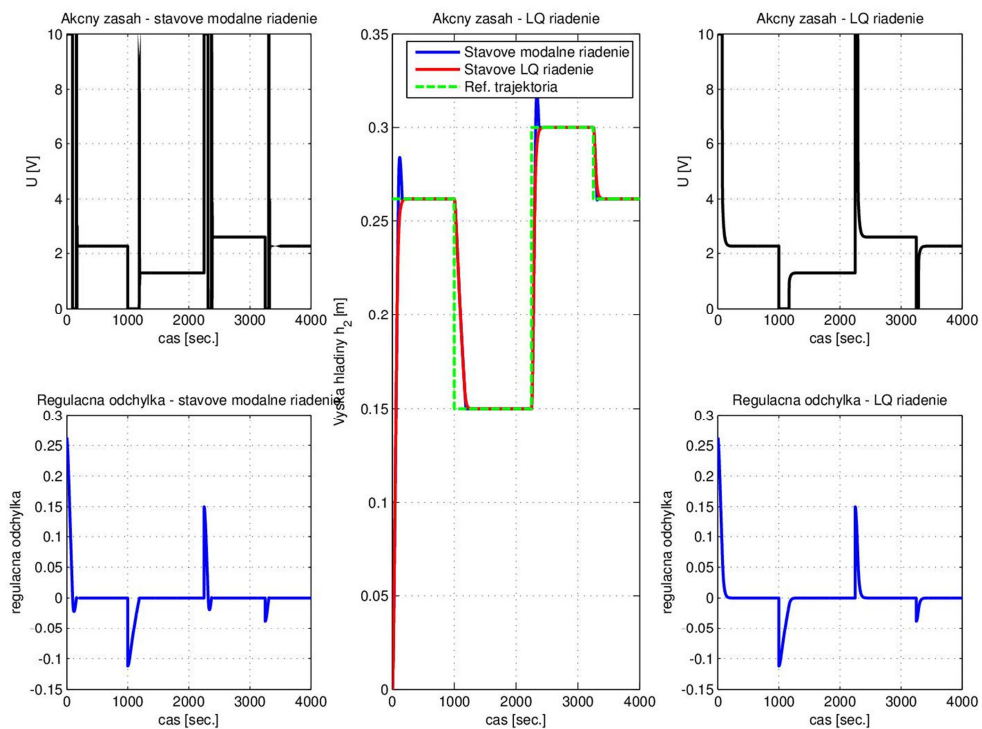
Obr.10 Porovnanie časových priebehov - stabilizácia regulovanej veličiny pri zmene ustálených hodnôt s poruchou – nelineárny model

5.f simulačné overenie stavových algoritmov riadenia do ustáleného stavu na lineárnom modeli



Obr.11 Stabilizácia regulovanej veličiny na ustálenú hodnotu – lineárny model

5.g simulačné overenie stavových algoritmov riadenia do rôznych ustálených stavov na lineárnom modeli



Obr.12 Stabilizácia regulovanej veličiny pri zmene ustálených hodnôt – lineárny model

Záver

Simuláciou dvoch typov stavového riadenia na nelineárnom modeli Hydraulického systému M6, pri zvolených póloch uzavretej riadiacej štruktúry pre modálne stavové riadenie a zvolených váhových maticiach pre stavové LQ riadenie, sme získali výsledky vo forme časových priebehov uvedených vyššie.

Z týchto časových priebehov vyplýva, že pri stavovom modálnom riadení bola doba nábehu kratšia v porovnaní s LQ riadením. Avšak na druhej strane stavové modálne riadenie malo väčšie preregulovanie ale menšiu regulačnú odchýlku ako malo LQ riadenie.

Veľkosť preregulovania a dobu nábehu pri stavovom modálnom riadení je možné upraviť voľbou vhodnejších pólov uzavretej regulačnej štruktúry, podobne aj pri LQ riadení voľbou iných váhových matíc **Q** a **R**.

Akčný zásah pri LQ riadení nevykazuje také veľké skokové zmeny ako akčný zásah pri stavovom modálnom riadení, pretože LQ riadenie je založené na metóde minimalizácie kvadratického funkcionálu a patrí medzi metódy optimálneho riadenia.